

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι  $f'(x_0) = 0$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση  $f$  ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , αν για κάποιο  $x_0 \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f''(x_0) = 0$ , τότε το  $x_0$  είναι θέση σημείου καμπής της  $f$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). (μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A3.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν ισχύει  $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ , τότε

α) η εξίσωση  $f(x) = 0$  δεν έχει λύση στο  $(\alpha, \beta)$ .

β) η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μία λύση στο  $(\alpha, \beta)$ .

γ) η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο  $(\alpha, \beta)$ .

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο  $(\alpha, \beta)$ .

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$

στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε  $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = G(\alpha) - G(\beta)$ .

**β)** Μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$ , ώστε  $f(x_1) < f(x_2)$ .

**γ)** Αν ένα σημείο  $M(\alpha, \beta)$  ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης  $f$ , τότε το σημείο  $M'(\beta, \alpha)$  ανήκει στη γραφική παράσταση  $C'$  της  $f^{-1}$ .

**δ)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$ , αν  $f(\alpha) = f(\beta)$ , τότε υπάρχει ακριβώς ένα  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = 0$ .

**ε)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν ισχύει  $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = 0$ , τότε  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

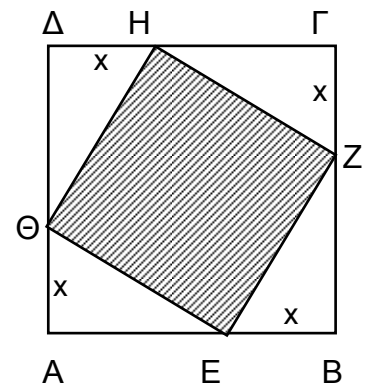
Δίνεται το τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  του διπλανού σχήματος με πλευρά  $2\text{cm}$ . Αν το τετράγωνο  $EZH\Theta$  έχει τις κορυφές του στις πλευρές του  $AB\Gamma\Delta$ :

**B1.** Να εκφράσετε την πλευρά  $EZ$  συναρτήσει του  $x$ .

**Μονάδες 6**

**B2.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου  $EZH\Theta$  δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4, \quad 0 \leq x \leq 2$$



**Μονάδες 4**

**B3.** Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  το εμβαδόν του τετραγώνου  $EZH\Theta$  γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

**Μονάδες 9**

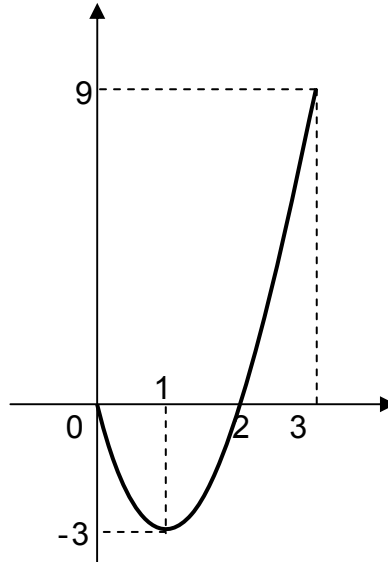
**B4.** Να εξετάσετε αν υπάρχει  $x_0 \in [0, 2]$ , για το οποίο το εμβαδόν  $f(x_0)$  του αντίστοιχου τετραγώνου  $EZH\Theta$  ισούται με  $4e^{x_0} + 1 \text{ cm}^2$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω συνάρτηση  $f$ , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[0, 3]$ , για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της  $f'$  δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- $f(0) = 2$ ,  $f(1) = 0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της  $f'$  και των ευθειών  $x=0$  και  $x=3$  ισούται με 8 τ.μ.
- Η  $f$  δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα  $[0, 3]$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(3) = 2$ ,  $f(2) = -2$  και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)-2}$ , δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της  $f$ .

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (2, 3)$  για το οποίο δεν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$ .

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

**Μονάδες 4**

**ΘΕΜΑ Δ**

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} -\frac{\eta\mu x}{x} + \alpha, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + 2, & x > 0. \end{cases}$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  στο διάστημα  $[0, 2]$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

**Μονάδες 2**

Αν η  $f$  είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

**Δ2.** Να βρείτε την τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 2**

**Δ3.** Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 8**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι:  $\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^2 f(x) dx < \frac{3\pi}{2} - 1$ .

**Μονάδες 7**

**Δ5.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f\left(\frac{-\pi}{2} \cdot x\right) = f\left(\frac{-\pi}{2} \cdot e^{-x}\right)$  έχει μοναδική λύση στο  $(0, 1)$ .

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**